楕円型・擬放物型システムによる 非等方的モノクロ画像処理過程

千葉大学　大学院融合理工学府　数学情報科学専攻
鵜飼直孝 (Naotaka UKAI) *

概要

本講演は, 方位調整を伴う非等方的モノクロ画像処理に関連する楕円型・擬放物型システムを主題とする. 本システムは [3] で提案されたモデルに基づいており, 先行研究 [6, 7, 1] では, 放物型および擬放物型システムの適切性に関する結果が報告されている. しかし, 従来のシステムでは, 方位の初期値の適切な設定方法が不明瞭であった. そこで本講演では, 方位の初期設定を必要としない楕円型・擬放物型システムを考察し, 得られた結果を報告する. 尚, 本稿は水野大樹さん (千葉大学大学院融合理工学府), 白川健先生 (千葉大学教育学部), Harbir Antil 先生 (George Mason 大学) との共同研究に基づく.

1　導入

本稿を通して, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界な領域とし, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は Lipschitz とする. また, $0 < T < \infty$ は時間の定数とし, $Q := (0,T) \times \Omega$, $\Sigma := (0,T) \times \Gamma$ と定める.

本稿では, 以下に記述される楕円-擬放物型システム (S) を考える:

$$\begin{cases} -\kappa \mathit{\Delta} \alpha + \nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) \cdot R(\alpha + \frac{\pi}{2})\nabla u = 0 \text{ in } Q, \\ \partial_t u - \operatorname{div}\left({}^\top R(\alpha)\nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) + \nu|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \mu\nabla\partial_t u\right) + \lambda(u - u_{\mathrm{org}}) = 0 \text{ in } Q, \\ \alpha = u = \partial_t u = 0 \text{ on } \Sigma, \quad u(0,x) = u^0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここに, $\kappa,\ \nu,\ \mu,\ \lambda > 0,\ p > 2$ は固定された定数とする.

システム (S) は次で定められる $[L^2(\Omega)]^2$ 上の汎関数 E の擬放物型勾配流として導出される:

$$[\alpha, u] \in [L^2(\Omega)]^2 \mapsto E(\alpha, u) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla\alpha|^2\,dx + \int_\Omega \gamma(R(\alpha)\nabla u)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\nu}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u - u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \\ \qquad \text{if } [\alpha, u] \in H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega), \\ \infty, \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

汎関数 E は, モノクロ画像に対する方位調整を考慮する高精度ノイズ除去を目的に, 文献 [3] において提案された支配エネルギーに基づいている. 定義式 (2) では, $\alpha \in H_0^1(\Omega)$ と $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が未知

---

* E-mail:24wd0101@student.gs.chiba-u.jp

変数となっており, それぞれを「画像の構成要素の方位 (角度) を表す関数」と「修正過程における画像データを表す関数」と対応させている. 更に与えられたノイズ入り元画像データ $u_{\mathrm{org}} \in L^2(\Omega)$ との L^2-距離 (の 2 乗) を加味することで, エネルギーの最小化による画像データの最適化が行えるようになっている. 加えて, 定義式 (2) に, ある与えられた非等方的な計量 $0 \leq \gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ と回転行列:

$$\alpha \in \mathbb{R} \mapsto R(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

の合成関数を組み入れることにより, 画像データ u だけでなく, 画像の構成要素の方位 α の自動調整をも考慮した高精度の画像データが実現できるよう, 工夫されている.

本稿で考えるシステム (S) の先行研究 (cf. [6, 7, 1]) と異なる点は, 第一方程式が楕円型方程式で構成されている点にある. これまでのシステムは定義式 (1) の第一方程式において $\partial_t \alpha$ を含む放物型システム, あるいは $\partial_t \alpha$ および $\Delta \partial_t \alpha$ を含む擬放物型システムであり, 先述の先行研究では, そのシステムの適切性 (解の存在・解の一意性・初期値に関する連続依存性) に関する結果が報告されている. しかし, 数値計算に応用する場合, 従来のシステムでは初期条件の設定に関して課題が残されている. 具体的には, 画像データ u の初期値については与えられたデータ u_{org} を手掛かりにして設定できるが, 方位 α の初期値については画像からどのように読み取ればよいか実は不明瞭である. したがって, 画像処理においては, 方位の初期値を手動で推定するのではなく, 方程式の中で自動的に計算されるモデルが望ましいと考えられる. そこで, 本稿では, 方位の初期設定を必要としない楕円型・擬放物型システムを考察し, 得られた結果を報告する.

2 準備

はじめに, 本稿で使用する記法についての説明を行う.

任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ に対して,

$$a \vee b := \max\{a, b\} \text{ and } a \wedge b := \min\{a, b\}$$

と定める.

次に, X を Banach 空間とする. $|\cdot|_X$ を X 上のノルムと表記する. 特に, X が Hilbert 空間であれば, その内積を $(\cdot,\cdot)_X$ と表す. また, $d \in \mathbb{N}$ とする. $x \in \mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムを $|x|$ と表し, $x, y \in \mathbb{R}^d$ のスカラー積を $x \cdot y$ と表す. すなわち,

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \quad \text{and} \quad x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d,$$
$$\text{for all } x = [x_1, \ldots, x_d],\ y = [y_1, \ldots, y_d] \in \mathbb{R}^d.$$

次に, 時間離散化に関する記法を導入する.

$\tau > 0$ は時間幅を表す正定数とし, 時間の列 $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ を

$$t_i := i\tau, \text{ for any } i = 0, 1, 2, \ldots.$$

として定める. 任意の点列 $\{[t_i,u_i]\}_{i=0}^{\infty}\subset[0,\infty)\times X$ に対し, 3 通りの補完 $[\overline{u}]_\tau\in L^\infty_{\rm loc}([0,\infty);X)$, $[\underline{u}]_\tau\in L^\infty_{\rm loc}([0,\infty);X)$, and $[u]_\tau\in W^{1,2}_{\rm loc}([0,\infty);X)$ を以下で定める:

$$\begin{cases}[\overline{u}]_\tau(t):=\chi_{(-\infty,0]}u_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)u_i, & \\ [\underline{u}]_\tau(t):=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)u_i, & \text{in } X,\ \text{for any } t\geq 0,\\ [u]_\tau(t):=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\left(\frac{t-t_{i-1}}{\tau}u_i+\frac{t_i-t}{\tau}u_{i-1}\right), & \end{cases}$$

ただし, $\chi_E:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ は集合 $E\subset\mathbb{R}$ の特性関数を表す.

3 主結果

本稿では, 以下を仮定する.

(A0) $p>2$, $\nu>0$, $\mu>0$, $\lambda>0$ は固定された定数とし, $\kappa>0$ は十分大きいとする.

(A1) $u_{\rm org}\in L^2(\Omega)$ は与えられた関数で, $0\leq u_{\rm org}\leq 1$ a.e. in Ω を満たす.

(A2) $\gamma\in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)\cap C^2(\mathbb{R}^2)$ は与えられた非負の凸関数で, $0\in\mathbb{R}^2$ が γ の唯一つの最小元である.

(A3) $u^0\in W^{1,p}_0(\Omega)$ は与えられた関数で, $0\leq u^0\leq 1$ a.e. in Ω を満たす.

次に, システム (S) の解の定義を述べる.

定義 1. 以下の条件を満たす関数の組 $[\alpha,u]$ をシステム (S) の解と呼ぶ.

(S0) $[\alpha,u]\in W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))\times[W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^\infty(0,T;W^{1,p}_0(\Omega))]$, $0\leq u\leq 1$ in $\overline{Q}$, and $u(0)=u^0$ in $[L^2(\Omega)]$.

(S1) α は以下の変分等式を満たす:

$$\kappa(\nabla\alpha(t),\nabla\varphi)_{[L^2(\Omega)]^2}+\int_\Omega\nabla\gamma(R(\alpha(t))\nabla u(t))\cdot R(\alpha(t)+\tfrac{\pi}{2})\nabla u(t)\varphi\,dx=0,$$
$$\forall\varphi\in H^1_0(\Omega),\ \text{a.e. } t\in(0,T).$$

(S2) u は以下の変分不等式を満たす:

$$\begin{aligned}&(\partial_t u(t),u(t)-\psi)_{L^2(\Omega)}+\mu(\nabla\partial_t u(t),\nabla(u(t)-\psi))_{[L^2(\Omega)]^2}\\&\quad+\nu\int_\Omega|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\cdot\nabla(u(t)-\psi)\,dx+\lambda(u(t)-u_{\rm org},u(t)-\psi)_{L^2(\Omega)}\\&\quad+\int_\Omega\gamma(R(\alpha(t))\nabla u(t))\,dx\leq\int_\Omega\gamma(R(\alpha(t))\nabla\psi)\,dx,\ \forall\psi\in W^{1,p}_0(\Omega),\ \text{a.e. } t\in(0,T).\end{aligned}$$

上記に基づき, 本稿では以下の主定理を, 現時点における成果として報告する.

主定理. ある $\kappa_*>0$ が存在し, 任意の $\kappa>\kappa_*$ に対して, システム (S) の解は唯一つ存在する. さらに, 以下のエネルギー不等式を満たす.

$$E(\alpha(t),u(t))\leq E(\alpha(s),u(s)),\ 0\leq\forall s\leq\forall t\leq T. \tag{3}$$

4 証明の概要

本章では, 重要な補題の紹介とその証明および主定理の証明の概略を記述する.

4.1 証明の準備

主定理の証明は, 以下の時間離散化スキームによる近似問題に基づく. $m \in \mathbb{N}$ を時間区間 $(0, T)$ の分割数とし, $\tau := \frac{T}{m}$ を時間幅を表す定数とする.

$(\mathrm{AP})^\tau$ 以下を満たす列 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ を求める問題:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta_0\alpha^i + \nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i) \cdot R(\alpha^i + \frac{\pi}{2})\nabla u^i = 0 \\ \dfrac{u^i - u^{i-1}}{\tau} - \mathrm{div}\Big({}^\top R(\alpha^i)\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i) + \nu|\nabla u^i|^{p-2}\nabla u^i + \dfrac{\mu}{\tau}\nabla(u^i - u^{i-1})\Big) + \lambda(u^i - u_{\mathrm{org}}) = 0 \end{cases}$$

ただし, $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ は与えられた関数であり, Δ_0 は斉次 Dirichlet 境界条件を付した Laplace 作用素を表す. また, $\alpha^0 \in H_0^1(\Omega)$ は以下を満たす関数として与える:

$$-\kappa\Delta_0\alpha^0 + \nabla\gamma(R(\alpha^0)\nabla u^0) \cdot R(\alpha^0 + \tfrac{\pi}{2})\nabla u^0 = 0.$$

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の解については以下のように定義する.

定義 2. $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m$ が $(\mathrm{AP})^\tau$ の解であるとは, $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ であり, 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し, $[\alpha^i, u^i]$ が以下を満たすことをいう:

(AP1) α^i は以下の変分等式を満たす:

$$\kappa(\nabla\alpha^i, \nabla\varphi)_{[L^2(\Omega)]^2} + (\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i) \cdot R\left(\alpha^i + \tfrac{\pi}{2}\right)\nabla u^i, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(AP2) u^i は以下の変分等式を満たす:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}(u^i - u^{i-1}, \psi)_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu}{\tau}(\nabla(u^i - u^{i-1}), \nabla\psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad + (\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i), R(\alpha^i)\nabla\psi)_{[L^2(\Omega)]^2} + \nu\int_\Omega |\nabla u^i|^{p-2}\nabla u^i \cdot \nabla\psi\, dx \\ &\quad + \lambda(u^i - u_{\mathrm{org}}, \psi)_{L^2(\Omega)} = 0,\ \forall\psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ については, 以下の定理を示すことができる.

定理 1. ある $\tau_0 \in (0, 1)$, $\kappa_0 > 0$ が存在し, 任意の $\tau \in (0, \tau_0)$, $\kappa \geq \kappa_0$ に対し, $(\mathrm{AP})^\tau$ はただ一つの解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ を持つ. さらに解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ は以下のエネルギー不等式を満たす.

$$E(\alpha^i, u^i) \leq E(\alpha^{i-1}, u^{i-1}),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{4}$$

定理 1. の証明には, 以下の補題を示すことが重要となる.

補題 1. $u_0^\dagger \in H^1(\Omega)$ に対し, 以下の楕円型境界値問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ を考える.

$$\begin{cases} -\kappa\Delta_0\alpha + \nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u)\cdot R(\alpha+\frac{\pi}{2})\nabla u = 0, \\ \dfrac{u-u_0^\dagger}{\tau} - \mathrm{div}\Big({}^\top R(\alpha)\nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) + \nu|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \dfrac{\mu}{\tau}\nabla(u-u_0^\dagger)\Big) + \lambda(u-u_{\mathrm{org}}) = 0. \end{cases}$$

このとき, 問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解 $[\alpha_k, u_k] \in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$, $k=1,2$, は以下を満たす:

$$\begin{aligned} &\bigg(\frac{\kappa}{2} - 4\Big(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}} + C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Big)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\bigg)|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &+\bigg(\frac{1}{\tau} - \frac{25}{\kappa\cdot(1\wedge\mu)}(1+C_p)^2\Big(1+\Big(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}\Big)^2\Big)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}^2\bigg)\cdot \\ &\qquad\cdot\Big(|u_1-u_2|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu|\nabla(u_1-u_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}^2\Big) \leq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

ただし, $C_{u^0} := E(0,u^0)$ であり, $C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}$, $C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}$ は Sobolev の埋め込み $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-2}}$ および $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-1}}$ による定数, C_p は Poincaré の不等式による定数を表す. したがって,

$$\begin{aligned} &\kappa > \kappa_1 := 8\Big(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}} + C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Big)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}, \\ &0 < \tau < \tau_1 := \left(\frac{\kappa\cdot(1\wedge\mu)}{25(1+C_p)^2\big(1+\big(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\big)^{\frac{2}{p}}\big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}\big)^2\big)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}^2}\right)\wedge\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

に対して, 問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解は唯一つである.

補題 *1.* **の証明** 変分学の一般論 (cf. [2]) より, (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解は以下の汎関数の最小元となる:

$$[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2 \mapsto \Phi(y,z) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega|\nabla y|^2\,dx + \frac{\nu}{p}\int_\Omega|\nabla z|^p\,dx + \frac{1}{2\tau}\int_\Omega|z-u_0^\dagger|^2\,dx \\ \qquad + \dfrac{\mu}{2\tau}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(z-u_0^\dagger)|^2\,dx + \int_\Omega\gamma(R(y)\nabla z)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Omega|z-u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \text{ if } [y,z]\in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

さらに, 任意の $[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2$ に対して,

$$\Phi(y,z) \geq \frac{\kappa}{2(C_p)^2}|y|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4}|z|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{2}|u_{\mathrm{org}}|_{L^2(\Omega)}^2,$$

であり, Φ は適正下半連続性を有するので, Φ の最小元が存在することがわかる.

ここで, 各 $i=1,\dots,m$ に対して, 以下の汎関数 Φ_i を定める.

$$[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2 \mapsto \Phi_i(y,z) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega|\nabla y|^2\,dx + \frac{\nu}{p}\int_\Omega|\nabla z|^p\,dx + \frac{1}{2\tau}\int_\Omega|z-u^{i-1}|^2\,dx \\ \qquad + \dfrac{\mu}{2\tau}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(z-u^{i-1})|^2\,dx + \int_\Omega\gamma(R(y)\nabla z)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Omega|z-u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \text{ if } [y,z]\in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

このとき, 各 $i=1,\dots,m$ に対し, $(\mathrm{AP})^\tau$ の解 $[\alpha^i,u^i]$ は Φ_i の最小元の 1 つになる. したがって,

$$
\begin{aligned}
E(\alpha^i,u^i) &\le \Phi_i(\alpha^i,u^i) \le \Phi_i(\alpha^{i-1},u^{i-1}) = E(\alpha^{i-1},\alpha^{i-1})\\
&\le \Phi_{i-1}(\alpha^{i-1},\alpha^{i-1}) \le \cdots \le E(\alpha^1,u^1) \le \Phi_1(\alpha^1,u^1).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

さらに, 以下を得る.

$$
\Phi_1(\alpha^1,u^1) \le \Phi_1(\alpha^0,u^0) = E(\alpha^0,u^0), \tag{7}
$$

$$
\Phi_1(\alpha^1,u^1) \le \Phi_1(0,u^0) = E(0,u^0) = C_{u^0}. \tag{8}
$$

次に, $[\alpha_k,u_k]\in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$ を問題 (E; $\alpha_k,u_k,u_0^\dagger)_\tau$, $k=1,2$, の解とする. このとき, (E; $\alpha_1,u_1,u_0^\dagger)_\tau$ と (E; $\alpha_2,u_2,u_0^\dagger)_\tau$ の各方程式同士を引き算し, (E1) の両辺に $(\alpha_1-\alpha_2)$ を掛け, (E2) の両辺に (u_1-u_2) を掛け, 2 つの式を足し合わせることで以下の不等式を得る:

$$
\begin{aligned}
&\kappa|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \frac{1}{\tau}\big(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)} + \mu|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\big)\\
&\quad + \lambda|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2)\,dx\\
&\quad + \int_\Omega \big(\nabla\gamma(R(\alpha_1)\nabla u_1)\cdot R(\alpha_1+\tfrac{\pi}{2})\nabla u_1 - \nabla\gamma(R(\alpha_2)\nabla u_2)\cdot R(\alpha_2+\tfrac{\pi}{2})\nabla u_2\big)(\alpha_1-\alpha_2)\,dx\\
&\quad + \int_\Omega \big({}^\top R(\alpha_1)\nabla\gamma(R(\alpha_1)\nabla u_1) - {}^\top R(\alpha_2)\nabla\gamma(R(\alpha_2)\nabla u_2)\big)\cdot\nabla(u_1-u_2) = 0.
\end{aligned}
$$

また, 仮定 (A2) と Tartar の不等式 (cf. [4, Lemma 2.1]) より, 以下を得る.

$$
\begin{aligned}
&\kappa|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \frac{1}{\tau}\Big(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)} + \mu|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\Big)\\
&\le 4|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})}\int_\Omega |\nabla u_1|^2|\alpha_1-\alpha_2|^2\,dx\\
&\quad + 5|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})}\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)||\nabla u_1||\alpha_1-\alpha_2|\,dx\\
&\quad + 4|\nabla\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\int_\Omega |\nabla u_1||\alpha_1-\alpha_2|^2\,dx\\
&\quad + 5|\nabla\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)||\alpha_1-\alpha_2|\,dx\\
&\quad + |\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + |\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで, Hölder の不等式, Young の不等式, Poincaré の不等式, 2 次元の Sobolev の埋め込み $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-2}}$, $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-1}}$, (6), (8) より, (9) の I_j, $j=1,2,3,4$, は以下のように評価できる:

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le 4|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla u_1|^2_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}\\
&\le 4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\le 4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(1+(C_p)^2)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le 5|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}|\nabla u_1|_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)} \\
&\le \frac{25}{\kappa}\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(1+C_p)^2|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\qquad + \frac{\kappa}{4}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}, \qquad (11) \\
I_3 &\le 4|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla u_1|_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \\
&\le 4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{1}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}})^2(1+(C_p)^2)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}, \qquad (12) \\
I_4 &\le 5|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \frac{25}{\kappa}(C_p)^2|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \frac{\kappa}{4}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

以上より, (9)–(13) を合わせることで不等式 (5) が得られる. □

定理 *1* の証明. 定理 1 は補題 1 からただちに得られる. 実際, 近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の解の存在と一意性については, 補題 1 において,

$$\tau_1 := \tau_0,\ \kappa_1 := \kappa_0,\ u_0^\dagger := u^{i-1},$$

とすれば, 一意解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m$ を得る.

次に, エネルギー不等式 (4) については, 補題 1 の (6) と (7) を組み合わせることで得られる. □

4.2 主定理の証明の概略.

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の第 1 方程式において, α^i の式と α^{i-1} の式を引き算した式に $\frac{1}{\tau}(\alpha^i-\alpha^{i-1})$ をかける. このとき, 仮定 (A2), 定理 1, Hölder の不等式, Young の不等式, Poincaré の不等式, 2 次元の Sobolev の埋め込みを用いることで, 以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\biggl(\frac{\kappa}{2}-\Bigl(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Bigr)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Bigl(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}+C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Bigr)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\biggr)|\nabla(\alpha^i-\alpha^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\le \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\Bigl(1+(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(\frac{p}{\nu}C_{u^0})^{\frac{2}{p}}\Bigr)(1+C_p)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}}{\kappa\mu}\bigl(\mu|\nabla(u^i-u^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\bigr). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

また, 近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の第 2 方程式に (u^i-u^{i-1}) をかけることで, 以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}|u^i-u^{i-1}|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\mu}{2\tau}|\nabla(u^i-u^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2}+\frac{\nu}{p}|u^i|^p_{[L^p(\Omega)]^2}+\frac{\lambda}{2}|u^i-u_{\mathrm{org}}|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad\le \frac{\nu}{p}|u^{i-1}|^p_{[L^p(\Omega)]^2}+\frac{\lambda}{2}|u^{i-1}-u_{\mathrm{org}}|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{T}{2\mu}|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\Omega|, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし, $|\Omega|$ は $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度を表す. よって, (14) より,

$$\kappa_2 := 2\Bigl(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Bigr)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Bigl(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}+C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Bigr)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}$$

とすれば, 定理 1, (14), (15) より $\kappa>\max\{\kappa_0,\kappa_2\}$ に対して, 以下の有界性が得られる.

(B-1) $\{[\alpha]_\tau \mid \tau\in(0,\tau_0)\}$ は $W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))$ で有界,

(B-2) $\{[\overline{\alpha}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$, $\{[\underline{\alpha}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ で有界,

(B-3) $\{[u]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;W^{1,p}_0(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))$ で有界,

(B-4) $\{[\overline{u}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$, $\{[\underline{u}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;W^{1,p}_0(\Omega))$ で有界,

(B-5) $\{\nabla\gamma(R([\overline{\alpha}]_\tau)\nabla[\overline{u}]_\tau) \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(Q;\mathbb{R}^2)$ で有界,

(B-6) 任意の $\tau \in (0,\tau_0)$ に対して, $t \in [0,T] \mapsto E([\overline{\alpha}]_\tau,[\overline{u}]_\tau) \in [0,\infty)$, $t \in [0,T] \mapsto E([\underline{\alpha}]_\tau,[\underline{u}]_\tau) \in [0,\infty)$ は非増加. さらに, $E(\alpha^0,u^0)$ は有界なので, $\{E([\overline{\alpha}]_\tau,[\overline{u}]_\tau), E([\underline{\alpha}]_\tau,[\underline{u}]_\tau) \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $BV(0,T)$ で有界.

上記を基に, システム (S) の可解性については, Aubin のコンパクト性定理 [5, Corollary 4] を用いることで得られる. また, エネルギー不等式 (3) については, エネルギーの収束の議論に, (B-6) および Helly の選出定理 [8, 定理 VIII. 19] による考察を加えることにより, 示すことができる.

次に, システム (S) の解の一意性の証明の概略を述べる. システム (S) の解の一意性を示すためには以下の不等式を導出することが鍵となる: ある正定数 $C_*, \widetilde{C} > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}J(t) + (\kappa - \widetilde{C})|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\&\le C_*(1+|\nabla u_1(t)|_{[L^p(\Omega)]^2})^2 J(t),\ \text{a.e. } t \in (0,T),\end{aligned} \tag{16}$$

ただし,

$$J(t) := |(u_1-u_2)(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \mu|\nabla(u_1-u_2)(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^2},\ \forall t \in [0,T].$$

であり, $[\alpha_k,u_k] \in [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^2 (k=1,2)$ は初期条件 $u_1(0)=u_2(0)=u_0$ を満たすシステム (S) の解である. したがって, もし $\kappa > \max\{\kappa_0,\kappa_2,\widetilde{C}\}$ であれば, Gronwall の補題より, システム (S) の解が一意であることが得られる. この不等式の導出については, α_k に対する 2 つの変分等式の差を取り, $\varphi := (\alpha_1-\alpha_2)(t)$ として得られる不等式と, u_1 の変分不等式において $\psi := u_2(t)$, u_2 の変分不等式において $\psi := u_1(t)$ とし, 2 つの式を足し合わせることで得られる不等式の 2 つの不等式を足し合わせることで得られる.

最後に, $0 \le u \le 1$ in $\overline{Q}$ については, 比較原理を用いることで, [1] と同様に示すことができる. □

参考文献

[1] Harbir Antil, Daiki Mizuno, Ken Shirakawa, and Naotaka Ukai. A gradient system based on anisotropic monochrome image processing with orientation auto-adjustment. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 33(2):755–782, 2024.

[2] Viorel Barbu. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2020.

[3] Benjamin Berkels, Martin Burger, Marc Droske, Oliver Nemitz, and Martin Rumpf. *Cartoon extraction based on anisotropic image classification.* SFB 611, 2006.

[4] V. L. Carbone, C. B. Gentile and K. Schiabel-Silva. Asymptotic properties in parabolic problems dominated by a p-Laplacian operator with localized large diffusion. *Nonlinear Anal.*, 74 (2011), 4002–4011.

[5] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.

[6] 白川 健. 非等方性を考慮する画像処理問題の支配エネルギーに対する連続系勾配流. 日本数学会 2018 年度会 実函数論分科会 講演アブストラクト, pages 73–74, 2018.

[7] 鵜飼 直孝, 水野 大樹, 白川 健, and Harbir Antil. 画像処理問題における方位調整を考慮するエネルギー勾配流. 日本数学会 2024 年度年会 実函数論分科会 講演アブストラクト, pages 23–24, 2024.

[8] 辻 正次. 実函数論. 槙書店, 東京, 1962.